

# LE THÉORÈME DE PÉRIODICITÉ EN $K$ -THÉORIE HERMITIENNE

Max Karoubi

La périodicité de Bott joue un rôle primordial en  $K$ -théorie topologique. Elle est d'ailleurs liée intimement au théorème d'Atiyah-Singer et plus généralement à la géométrie non commutative. Dans deux articles précédents [K1] et [K2], nous avons démontré l'analogie de ce théorème en  $K$ -théorie hermitienne pour des anneaux discrets avec (anti)involution  $a \mapsto \bar{a}$ , sous l'hypothèse qu'il existe un élément  $\lambda$  du centre de  $A$  tel que  $\lambda + \bar{\lambda} = 1$  (on dit alors que 1 est scindé dans  $A$ ). Si l'anneau est commutatif et muni de l'involution triviale, ceci introduit l'hypothèse que 2 est inversible dans  $A$ .

Si cette dernière hypothèse est anodine pour les algèbres de Banach, il n'en est pas de même pour des anneaux importants comme l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}\pi$ , où  $\pi$  est un groupe discret. Une difficulté rencontrée pour l'étude de ce type d'anneau est la divergence entre les notions de forme quadratique et de forme hermitienne. Dans cet article, nous développons une théorie qui dépasse cette dichotomie et qui est déjà présente dans le travail fondamental de Ranicki [R]. Grâce à cette théorie le théorème de périodicité peut être démontré pour tout anneau. Nous montrons par exemple que les groupes de Witt supérieurs d'un corps fini de caractéristique 2 sont tous isomorphes à  $\mathbb{Z}/2$  (exemple 5.14).

Les méthodes de cet article sont beaucoup inspirées de celles de [K1] et [K2] que nous adaptons à notre propos, ce qui nous permet d'être relativement bref pour certaines démonstrations. Un autre ingrédient essentiel est un cup-produit entre formes quadratiques défini par Clauwens [C]. Celui-ci permet de définir le morphisme de périodicité dans le cas général. L'article de Clauwens ayant été écrit dans un contexte différent, nous reprenons dans un appendice les lemmes essentiels dont nous avons besoin pour nos démonstrations.

Résumons brièvement les différentes parties de cet article

- (1) **Description de différents types de formes hermitiennes.** Après des rappels sur les définitions classiques utilisées, nous introduisons un nouveau type de groupe orthogonal, dit "élargi" : cf. 1.6/7. Si 1 est scindé dans  $A$ , celui-ci coïncide avec le groupe orthogonal sur l'anneau des nombres duaux associé à  $A$ , soit  $A[e]/e^2$ , noté simplement  $A(e)$  dans la suite de l'article.

- (2) **Les groupes de Grothendieck et Bass en  $K$ –théorie hermitienne.**  
Nous montrons comment les théorèmes principaux en  $K$ –théorie hermitienne restent valables dans le cas “élargi”. Nous précisons aussi les notations utilisées, en suivant partiellement la terminologie du livre de Bak [?]. Par exemple, la notation “ $L$ ”, utilisée en [K1] et [K2], est abandonnée et remplacée par la notation “ $\mathcal{KQ}$ ”, pour éviter toute ambiguïté avec les groupes de chirurgie.
- (3) **Les groupes  ${}_{\varepsilon}KQ_n(A)$  pour  $n > 0$  et  $n < 0$ .** Les définitions essentielles sont contenues dans ce paragraphe, en utilisant des idées bien connues en  $K$ –théorie algébrique. Le théorème 3.2 permet de comparer les théories “max” et “min”, suivant la terminologie de Bak. Nous montrons aussi comment les techniques de Quillen se transcrivent dans notre situation en une description plus géométrique des éléments de  ${}_{\varepsilon}KQ_n(A)$ .
- (4) **Cup-produits en  $K$ –théorie hermitienne. Le cup-produit de Clauwens.** Le cup-produit en  $K$ –théorie hermitienne est défini à l’aide de sa description en termes de fibrés plats. Un cup-produit plus subtil, dû essentiellement à Clauwens, est défini en 4.3 (cf. aussi l’appendice). Nous montrons comment tous ces produits sont reliés entre eux dans le théorème 4.7.
- (5) **Le théorème fondamental de la  $K$ –théorie hermitienne pour des anneaux arbitraires.** Dans ce paragraphe, nous généralisons les résultats principaux de [K1] et [K2] (cf. le théorème 5.2 et la remarque 5.11). La relation avec les groupes de Witt est faite dans le théorème 5.10.
- (6) **Les groupes de Witt stabilisés.** En utilisant les résultats précédents, nous introduisons une théorie nouvelle de groupes de Witt “stabilisés” généralisant ceux définis en [K4]. Ses propriétés fondamentales sont décrites en 6.1. Une généralisation dans le cadre des schémas a été proposée par M. Schlichting [S] en supposant 2 inversible.
- (7) **Appendice.** Les lemmes de Clauwens.

**Remerciements.** Ce travail a été essentiellement accompli pendant le programme thématique sur la théorie de l’homotopie en 2007, organisé au Fields Institute à Toronto. Je remercie également A. Ranicki pour avoir attiré mon attention sur l’article de Clauwens [C], J. Berrick pour la démonstration du lemme 4 en appendice, plus simple que le lemme original de Clauwens, ainsi que M. Schlichting pour des commentaires pertinents après une première version de ce texte.

## 1. Description des différents types de formes hermitiennes et quadratiques.

**1.1.** Soit  $A$  un anneau muni d’une (anti)involution  $a \mapsto \bar{a}$  (on dit alors que  $A$  est un anneau hermitien) et soit<sup>1</sup>  $\varepsilon = \pm 1$ . Nous désignons par  $\mathcal{P}(A)$  la catégorie des  $A$ –modules (à droite) qui sont projectifs de type fini (les morphismes étant restreints aux isomorphismes). Si  $E$  est un objet de  $\mathcal{P}(A)$ , son dual  $E^*$  est le groupe formé des applications additives  $f : E \rightarrow A$  telles que  $f(x\lambda) = \bar{\lambda}f(x)$ , où  $\lambda \in A$  et

---

<sup>1</sup>On pourrait choisir plus généralement un élément  $\varepsilon$  du centre de  $A$  tel que  $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$ . Cependant, on se ramène à ce cas en remplaçant  $A$  par  $M_2(A)$ , l’algèbre des matrices  $2 \times 2$  à coefficients dans  $A$ , munie d’une involution adéquate (cf. 1.10).

$x \in E$ . C'est en fait un objet de  $\mathcal{P}(A)$ , la structure de  $A$ -module à droite étant définie par la formule  $(f.\lambda)(x) = f(x)\lambda$ . Le module  $E$  et son bidual  $E^{**}$  sont isomorphes canoniquement grâce à la correspondance  $x \mapsto (f \mapsto \overline{f(x)})$ . Nous identifierons  $E$  à  $E^{**}$  par cet isomorphisme. Par ailleurs, si  $f : E \rightarrow F$  est un morphisme dans  $\mathcal{P}(A)$ , son transposé  ${}^t f : F^* \rightarrow E^*$  est défini par la formule classique  ${}^t f(g) = g.f$  et on a  ${}^t({}^t f) = f$ , compte tenu des isomorphismes canoniques entre les modules  $E$ ,  $F$  et leurs biduaux respectifs.

**1.2.** Nous définissons une forme  $\varepsilon$ -hermitienne sur  $E$  comme un morphisme  $\phi : E \rightarrow E^*$  tel que  ${}^t \phi = \varepsilon \phi$ , où  ${}^t \phi : (E^*)^* \cong E \rightarrow E^*$ . La forme  $\phi$  est dite “non dégénérée” si c'est un isomorphisme. Il convient de remarquer que la donnée de  $\phi$  équivaut à celle d'une application  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire

$$\chi : E \times E \rightarrow A$$

telle que  $\chi(x\lambda, y\mu) = \overline{\lambda}\chi(x, y)\mu$  si  $\lambda$  et  $\mu \in A$ ,  $x$  et  $y \in E$ . La correspondance est donnée par la formule classique suivante

$$\chi(x, y) = \phi(y)(x)$$

La condition de  $\varepsilon$ -symétrie ( ${}^t \phi = \varepsilon \phi$ ) se traduit par l'identité

$$\chi(y, x) = \overline{\varepsilon \chi(x, y)}$$

Dans cet article, les formes hermitiennes  $\phi$  qui nous intéressent sont paires : elles s'écrivent sous la forme

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon {}^t \phi_0$$

Il convient de noter que  $\phi_0$  n'est pas déterminé par cette formule. Si  $\phi_1$  est un autre choix et si pose  $\gamma = \phi_0 - \phi_1$ , on a  ${}^t \gamma = -\varepsilon \gamma$ .

**1.3.** Les formes hermitiennes paires sont les objets d'une catégorie notée<sup>2</sup>  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\max}(A)$ , définie de la manière suivante : un morphisme

$$(E, \phi) \rightarrow (F, \psi)$$

est un isomorphisme  $f$  entre les  $A$ -modules sous-jacents tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ E^* & \xleftarrow{{}^t f} & F^* \end{array}$$

**1.4.** De manière parallèle, en suivant Tits [T] et Wall [W], on définit une forme  $\varepsilon$ -quadratique non dégénérée sur  $E$  comme une classe de morphismes

$$\phi_0 : E \rightarrow E^*$$

tels que  $\phi_0 + \varepsilon {}^t \phi_0 = \phi$  soit une forme hermitienne non dégénérée. Plus précisément, la classe de  $\phi_0$  est définie modulo l'addition par un morphisme du type  ${}^t \gamma - \varepsilon \gamma$ . Les formes  $\varepsilon$ -quadratiques sont aussi les objets d'une catégorie notée<sup>3</sup>  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\min}(A)$ . Un morphisme

$$(E, \phi_0) \rightarrow (F, \psi_0)$$

<sup>2</sup> En suivant la terminologie de Bak [?].

<sup>3</sup>cf. la note précédente.

est un isomorphisme  $f$  entre les  $A$ -modules sous-jacents tel qu'il existe  $\gamma$ , morphisme de  $E$  dans  $E^*$ , vérifiant l'identité

$${}^t f \cdot \psi_0 \cdot f = \phi_0 + \gamma - \varepsilon^t \gamma \quad (S)$$

**1.5. Remarques.** Si  $A$  est un corps muni de l'involution triviale, il est facile de voir que la catégorie des 1-formes quadratiques est équivalente à la catégorie usuelle : il suffit de poser

$$q(x) = \phi_0(x)(x)$$

Cette remarque justifie la définition abstraite introduite dans 1.3.

Par ailleurs, si 1 est scindé dans  $A$  (cf. l'introduction), la catégorie des modules  $\varepsilon$ -hermitiens est équivalente à celle des modules  $\varepsilon$ -quadratiques : avec les définitions ci-dessus il suffit de poser  $\gamma = \lambda({}^t f \cdot \psi_0 \cdot f - \phi_0)$ . Ce cas se présente notamment si 2 est inversible dans  $A$ .

**1.6.** Nous allons maintenant introduire une troisième catégorie qui jouera un rôle important dans notre travail et qui sera notée  $\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$  ("él" pour "élargi" ; cf. la fin de 1.7). Les objets sont quasiment les mêmes que ceux de la catégorie  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$  précédente, sauf que l'on considère les  $\phi_0$  comme donnés dans la structure (on ne considère pas seulement les classes de tels  $\phi_0$ ). Un morphisme de  $(E, \phi_0)$  vers  $(F, \psi_0)$  est défini par un couple  $(f, \gamma)$ , tel que l'identité (S) ci-dessus soit satisfaite. La loi de composition des morphismes s'explique ainsi

$$(f, \gamma) \cdot (g, \zeta) = (f \cdot g, \zeta + {}^t g \cdot \gamma \cdot g) \quad (C)$$

ce qui est cohérent avec l'identité (S).

**1.7.** Il est instructif de décrire plus précisément le groupe des automorphismes d'un objet dans chacune des trois catégories. Si  $(E, \phi)$  est un objet de  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{max}}(A)$ , le **groupe unitaire**  ${}_{\varepsilon}O^{\text{max}}(E, \phi)$  est défini par des isomorphismes  $f : E \rightarrow E$  tels que

$${}^t f \cdot \phi \cdot f = \phi$$

Si on note  $f^* = \phi^{-1} \cdot {}^t f \cdot \phi$  l'opérateur adjoint de  $f$ , il revient au même d'écrire

$$f^* \cdot f = \text{Id}_E \quad (\text{ou } f \cdot f^* = \text{Id}_E)$$

Le **groupe orthogonal**  ${}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E, \phi_0)$  est défini par des isomorphismes  $f : E \rightarrow E$  tels qu'il existe  $\gamma$ , morphisme de  $E$  dans  $E^*$ , vérifiant l'identité

$${}^t f \cdot \phi_0 \cdot f = \phi_0 + \gamma - \varepsilon^t \gamma \quad (E)$$

Il est clair que  ${}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E, \phi_0)$  est un sous-groupe de  ${}_{\varepsilon}O^{\text{max}}(E, \phi)$  pour  $\phi = \phi_0 + \varepsilon^t \phi_0$ , la forme hermitienne associée à  $\phi_0$ . Il est facile de voir que les groupes  ${}_{\varepsilon}O^{\text{max}}(E, \phi)$  et  ${}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E, \phi_0)$  coïncident si 1 est scindé dans  $A$ .

Finalement, le **groupe orthogonal élargi**  ${}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(E, \phi_0)$  est défini par des couples  $(f, \gamma)$  vérifiant l'identité (E) ci-dessus. La loi de composition est donnée par l'identité (C) écrite aussi plus haut. On a un épimorphisme

$${}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(E, \phi_0) \rightarrow {}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E, \phi_0)$$

dont le noyau est égal au groupe abélien  ${}_{\varepsilon}S(E)$  formé des morphismes  $\gamma : E \rightarrow E^*$  tels que  ${}^t\gamma = \varepsilon\gamma$ . Nous obtenons ainsi une extension de groupes non triviale en général

$$1 \longrightarrow {}_{\varepsilon}S(E) \longrightarrow {}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(E, \phi_0) \longrightarrow {}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E, \phi_0) \longrightarrow 1$$

Celle-ci justifie la terminologie adoptée de “groupe orthogonal élargi”.

Pour les calculs, il est commode d’identifier  $E$  à son dual par la forme hermitienne  $\phi$  associée à  $\phi_0$ . Le morphisme  $\gamma$  est alors remplacé par un endomorphisme  $u = \phi^{-1}\gamma$  de  $E$ . On peut de même remplacer  $\phi_0$  par  $\psi = \phi^{-1}\phi_0$ . On a alors  $\psi^* = \phi^{-1} \cdot {}^t\psi \cdot \phi = \phi^{-1}({}^t\phi_0 \cdot \bar{\varepsilon} \phi^{-1} \cdot \phi) = \phi^{-1}(\phi - \phi_0) = 1 - \psi$ . La relation (E) ci-dessus s’écrit alors  $f^* \cdot \psi \cdot f = \psi + u - u^*$  ou encore  $f^{-1} \cdot \psi \cdot f = \psi + u - u^*$  puisque  $f$  est unitaire.

Grâce à cette traduction, la loi de composition dans  ${}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(E, \phi_0)$  s’écrit simplement

$$(f, u) \cdot (g, v) = (f \cdot g, v + g^* \cdot u \cdot g) = (f \cdot g, v + g^{-1} \cdot u \cdot g)$$

Le noyau  ${}_{\varepsilon}S(E)$  de l’homomorphisme surjectif  ${}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(E, \phi_0) \rightarrow {}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E, \phi_0)$  s’identifie à l’ensemble des morphismes auto-adjoints de  $E$ , noté simplement  $S(E)$ . L’extension précédente s’écrit alors de manière équivalente

$$1 \rightarrow S(E) \longrightarrow {}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(E) \longrightarrow {}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E) \longrightarrow 1$$

Dans cette extension, le groupe  ${}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E)$  opère à droite sur  $S(E)$  par la formule suivante :

$$(u, g) \mapsto g^{-1} \cdot u \cdot g$$

**1.8.** Si 1 est scindé dans  $A$ , on peut définir une section  $s$  de cette extension en posant

$$s(g) = (g, \lambda(g^* \cdot \psi \cdot g - \psi)) = (g, \lambda(g^{-1} \cdot \psi \cdot g - \psi))$$

Il en résulte que le groupe orthogonal élargi s’identifie au produit semi-direct du groupe orthogonal  ${}_{\varepsilon}O(E)$  par le groupe additif  $S(E)$ , grâce à l’action définie ci-dessus. Une autre façon de voir les choses est d’introduire l’anneau des nombres duaux  $A(e)$  avec  $e^2 = 0$  et  $\bar{e} = -e$  puis d’étendre les scalaires à  $A(e)$ . Nous savons déjà que le groupe orthogonal  ${}_{\varepsilon}O^{\text{min}}(E)$  s’identifie au groupe unitaire  ${}_{\varepsilon}O^{\text{max}}(E)$ . Par ailleurs l’épimorphisme

$$O^{\text{max}}(E(e)) \rightarrow O^{\text{max}}(E)$$

a comme noyau l’ensemble des matrices unitaires du type  $1 + ue$ , c’est-à-dire vérifiant l’identité  $(1 + ue)(1 - u^*e) = 1 + (u - u^*)e = 1$ , soit  $u = u^*$ . Le groupe unitaire opère sur ce noyau par l’action à droite définie par la même action :  $(u, g) \mapsto g^{-1}ug$ . Il en résulte que le groupe orthogonal élargi  $O^{\text{él}}(E)$  s’identifie à  $O^{\text{max}}(E(e))$  en tant que produit semi-direct.

**1.9.** Considérons le cas particulier où  $A = B \times B^{\text{op}}$ ,  $B^{\text{op}}$  étant l’anneau opposé à  $B$ , l’invololution permutant les facteurs du produit. Si nous posons  $\lambda = (1, 0)$ , on a  $\lambda + \bar{\lambda} = 1$ , ce qui montre que 1 est scindé dans  $A$ . Il est facile de voir que la donnée d’un  $A$ -module hermitien équivaut à celle d’un  $B$ -module. Les catégories  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{max}}(A)$  et  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$  sont donc toutes les deux équivalentes à la catégorie  $\mathcal{P}(B)$  (avec les isomorphismes comme morphismes). D’après 1.7, nous en déduisons que les catégories  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$  et  $\mathcal{P}(B(e))$  sont équivalentes. En effet, nous avons montré

en 1.7 que le groupe des automorphismes d'un objet de  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$  est le même que celui des automorphismes du  $B$ -module correspondant, vu comme un objet de  $B(e)$  par extension des scalaires. Puisque les classes d'isomorphie d'objets de  $\mathcal{P}(B(e))$  coïncident avec les classes d'isomorphie d'objets de  $\mathcal{P}(B)$ , l'assertion résulte de considérations générales sur les équivalences de catégories.

**1.10.** Rappelons maintenant la définition du foncteur hyperbolique classique

$$H : \mathcal{P}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$$

Si  $E$  est un objet de  $\mathcal{P}(A)$ ,  $H(E)$  est le  $A$ -module  $E \oplus E^*$  muni de la forme quadratique

$$\varphi_0 : E \oplus E^* \rightarrow (E \oplus E^*)^* \approx E^* \oplus E$$

définie par la matrice

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $u$  est un isomorphisme dans la catégorie  $\mathcal{P}(A)$ , on définit  $H(u) = g = u \oplus {}^t u^{-1}$ . On vérifie que  ${}^t g \cdot \varphi_0 \cdot g = \varphi_0$  et que  $H(u)$  est donc bien un isomorphisme dans la catégorie  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$ . On peut décrire ce foncteur de manière plus conceptuelle en considérant l'anneau  $\Lambda = M_2(A)$  des matrices  $2 \times 2$  à coefficients dans  $A$  et où l'involution est définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

L'équivalence de Morita démontrée dans [?] §9 montre que les catégories  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(\Lambda)$  et  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$  sont équivalentes. On démontre par la même méthode que les catégories  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{max}}(\Lambda)$  et  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{max}}(A)$  d'une part et les catégories  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(\Lambda)$  et  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$  d'autre part sont équivalentes. Le foncteur hyperbolique  $\mathcal{P}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$  est alors induit par l'homomorphisme d'anneaux  $A \times A^{op} \rightarrow M_2(A)$  défini par

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$$

D'après 1.8, cette méthode a l'avantage de définir un nouveau foncteur hyperbolique de  $\mathcal{P}(A)$  dans la catégorie plus fine  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$  par la composition des foncteurs évidents suivants induits par des morphismes d'anneaux ou des équivalences de Morita :

$$\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A(e)) \sim {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A \times A^{op}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(M_2(A)) \sim {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$$

On procède de même pour le foncteur "oubli"  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  qui est la composition

$${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A \times A^{op}) \sim \mathcal{P}(A(e)) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

## 2. Les groupes de Grothendieck et Bass en $K$ -théorie hermitienne.

**2.1.** Aux catégories précédentes  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{max}}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$  et  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$ , nous pouvons associer trois groupes de  $K$ -théorie hermitienne notés  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{max}}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{min}}(A)$  et  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{él}}(A)$  respectivement, reliés par des homomorphismes canoniques

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{él}}(A) \xrightarrow{u} {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{min}}(A) \xrightarrow{v} {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{max}}(A) ,$$

Il est clair que  $u$  est un isomorphisme et que  $v$  est surjectif. Par ailleurs, nous pouvons définir l'analogue du groupes de Bass  $K_1(A)$  en  $K$ -théorie hermitienne.

Dans ce but, le lemme suivant, dont la démonstration est détaillée dans [KV] p. 61 par exemple, est essentiel.

**2.2. Lemme.** *Tout module  $\varepsilon$ -quadratique est facteur direct d'un module hyperbolique.*

**2.3.** Puisque tout module projectif de type fini est facteur direct d'un module libre du type  $A^n$ , on voit que les groupes classiques qui jouent le rôle de  $GL_n(A)$  sont les groupes d'automorphismes de modules hyperboliques du type  $H(A^n)$  dans chacune des trois catégories concernées.

Plus précisément, écrivons  $E = M \oplus M^*$  (on considèrera le cas où  $M = A^n$  un peu plus tard). La forme quadratique associée est définie par la matrice  $\phi_0$  précédente avec  $\psi$  comme forme hermitienne associée, soit

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $f : E \rightarrow E$  est un homomorphisme défini par une matrice  $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , son

adjoint est la matrice  $f^* = \begin{pmatrix} {}^t d & \varepsilon {}^t b \\ \varepsilon {}^t c & {}^t a \end{pmatrix}$ .

Dans le cas où  $M = A^n$ , il convient de remplacer la notation  ${}^t u$  par  ${}^t \bar{u}$ , si on écrit  $u$  comme une matrice  $n \times n$ . En effet, la conjugaison résulte de l'identification de  $A^n$  avec son dual  $(A^n)^*$ .

**2.4. Notations.** On désigne par  ${}_\varepsilon O_{n,n}^{\max}(A)$  (resp.  ${}_\varepsilon O_{n,n}^{\min}(A)$ ,  ${}_\varepsilon O_{n,n}^{\text{él}}(A)$ ) le groupe unitaire (resp. orthogonal, orthogonal élargi) associé au module hyperbolique  $(A)^n \oplus (A^n)^*$ .

**2.5. Exemple.** Supposons que  $A$  soit un corps muni de l'involution triviale et que  $\varepsilon = 1$ . Le fait que  $f$  soit unitaire ( $f \in {}_1 O_{n,n}^{\max}(A)$ ) se traduit par les identités suivantes (où  $a, b, c$  et  $d$  sont des matrices  $n \times n$ ) :

$$\begin{aligned} a.{}^t d + b.{}^t c &= 1 \\ a.{}^t b + b.{}^t a &= 0 \\ c.{}^t d + d.{}^t c &= 0 \\ c.{}^t b + d.{}^t a &= 1 \end{aligned}$$

L'automorphisme  $f$  est orthogonal ( $f \in {}_1 O_{n,n}^{\min}(A)$ ) s'il existe en outre des matrices  $h$  et  $k$  telles que  $a.{}^t b = h - {}^t h$  et  $c.{}^t d = k - {}^t k$ .

Pour décrire un élément du groupe orthogonal élargi, il faut se donner en outre un endomorphisme défini par une matrice  $2n \times 2n$

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

liée à  $f$  et à la forme  $\phi_0$  (cf. 1.6/7). Plus précisément, le couple  $(f, u)$  doit vérifier l'identité suivante

$$\begin{pmatrix} {}^t d.a & {}^t b.d \\ {}^t c.a & {}^t c.b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^t \delta & {}^t \beta \\ {}^t \gamma & {}^t \alpha \end{pmatrix}$$

Elle résulte de l'équation (E) en 1.7, à condition d'identifier  $E \oplus E^*$  à  $E^* \oplus E$  (avec  $E = A^n$ ).

**2.6.** Revenons au cas général d'un anneau  $A$  quelconque. Pour simplifier, nous écrivons  ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$  au lieu de  ${}_{\varepsilon}O_{n,n}^{\max}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}O_{n,n}^{\min}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}O_{n,n}^{\text{él}}(A)$  en revenant à ces notations spécifiques lorsqu'il sera nécessaire de distinguer les trois groupes. De même, nous utiliserons la terminologie uniforme "groupe orthogonal" au lieu de "groupe unitaire", "groupe orthogonal" ou "groupe orthogonal élargi", lorsque nos considérations s'appliquent aux trois variantes. Avec ces conventions, le groupe orthogonal infini  ${}_{\varepsilon}O(A)$  est défini comme la limite inductive des groupes  ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$  avec les inclusions évidentes. En suivant l'exemple du groupe linéaire, nous définissons le "groupe de Bass"  ${}_{\varepsilon}KQ_1(A)$  comme le quotient de  ${}_{\varepsilon}O(A)$  par le sous-groupe des commutateurs  $[{}_{\varepsilon}O(A), {}_{\varepsilon}O(A)]$ . Le fait que ce sous-groupe soit parfait résulte de considérations bien connues sur la stabilisation des matrices qu'on peut résumer par des identités générales. La première est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\alpha^{-1}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, modulo le sous-groupe des commutateurs, une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est le commutateur suivant

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutes ces identités (qui sont vraies dans le cadre plus général de catégorie monoïdales symétriques) démontrent bien que  $[{}_{\varepsilon}O(A), {}_{\varepsilon}O(A)]$  est parfait. Pour chacune des trois théories considérées, on utilisera les notations  ${}_{\varepsilon}KQ_1^{\max}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}KQ_1^{\min}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}KQ_1^{\text{él}}(A)$  ou simplement  ${}_{\varepsilon}KQ_1(A)$ .

**2.7. Théorème .** *Considérons un carré cartésien d'anneaux hermitiens (avec  $\varphi_1$  surjectif)*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi_1} & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\psi_2} & A' \end{array}$$

*On a alors une suite exacte (dite de Mayer-Vietoris) entre les groupes de K-théorie hermitienne*

$$\begin{aligned} {}_{\varepsilon}KQ_1(A) &\longrightarrow {}_{\varepsilon}KQ_1(A_1) \oplus {}_{\varepsilon}KQ_1(A_2) \longrightarrow {}_{\varepsilon}KQ_1(A') \longrightarrow {}_{\varepsilon}KQ(A) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow {}_{\varepsilon}KQ(A_1) \oplus {}_{\varepsilon}KQ(A_2) \longrightarrow {}_{\varepsilon}KQ(A') \end{aligned}$$

*Démonstration.* Ce théorème classique peut être démontré de diverses manières.



L'une d'entre elle est esquissée dans le livre de Milnor [M] et détaillée dans celui de Bak [?]. Une autre démonstration est indiquée dans [KV] p. 68-70 (elle s'applique dans les trois situations). Le point important est de remarquer qu'un élément du sous-groupe des commutateurs  $[_\varepsilon O(A'), {}_\varepsilon O(A')]$  se relève en un élément de  ${}_\varepsilon O(A_1)$ . Ceci est démontré grâce au lemme de Whitehead classique adapté au cas hermitien (cf. [KV] théorème 2.6 par exemple).

**2.8.** Dans [?] p. 191, Bak démontre une suite exacte intéressante reliant les groupes  ${}_\varepsilon KQ^{\max}$  et  ${}_\varepsilon KQ^{\min}$ . Elle s'écrit

$${}_\varepsilon KQ_1^{\min}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon KQ_1^{\max}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon \Xi(A) \longrightarrow {}_\varepsilon KQ^{\min}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon KQ^{\max}(A)$$

Le groupe de 2-torsion  ${}_\varepsilon \Xi(A)$  est explicité ainsi. Nous définissons d'abord  $\Gamma = \Gamma(A)$  comme l'ensemble des éléments  $a$  de  $A$  tels que  $\bar{a} = \varepsilon a$  et  $\Lambda$  comme le sous-groupe de  $\Gamma$  formé des  $b - \varepsilon \bar{b}$ . Alors  ${}_\varepsilon \Xi(A)$  est le quotient de  $\Gamma/\Lambda \otimes_A \Gamma/\Lambda$  par le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme

$$\{a \otimes b - b \otimes a\} \text{ et } \{a \otimes b - a \otimes b \bar{a}\}$$

Dans la définition du produit tensoriel  $\Gamma/\Lambda \otimes_A \Gamma/\Lambda$ , l'action à droite de  $A$  sur  $\Gamma/\Lambda$  est  $(\gamma, a) \mapsto \bar{a}\gamma a$ . L'action à gauche est définie de manière similaire par  $(a, \gamma) \mapsto a \cdot \gamma \cdot \bar{a}$ . Un théorème plus général est en fait énoncé dans [?] en utilisant des "formes paramètres" arbitraires  $\Gamma$  et  $\Lambda$ .

**2.9. Remarque.** La suite exacte précédente permet de définir un invariant des formes quadratiques proche de l'invariant de Arf en considérant des corps de caractéristique 2 (cf. [B2]). Dans ce cas, le groupe  $KQ_1^{\max}(A)$  est réduit à 0,  $KQ^{\max}(A) \cong \mathbb{Z}$  et le noyau de la flèche

$$KQ^{\min}(A) \rightarrow KQ^{\max}(A) = \mathbb{Z}$$

s'identifie ainsi au groupe  $\Xi(A)$  précédent : c'est le quotient de  $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$  par le sous-groupe engendré par les relations  $\{a \otimes b - b \otimes a\}$ ,  $\{a \otimes b - a \otimes b^2 a\}$  et  $\{c^2 a \otimes b - a \otimes c^2 b\}$ . L'invariant de Arf classique est obtenu par l'application  $a \otimes b \mapsto a \cdot b$  : elle est à valeurs dans le quotient  $G$  de  $F$  par le sous-groupe additif engendré par les relations  $\{a^2 - a\}$ . Cette application de  $\Xi(A)$  dans  $G$  admet une rétraction induite par l'application  $a \mapsto 1 \otimes a$ .

### 3. Les groupes de $K$ -théorie hermitienne ${}_\varepsilon KQ_n(A)$ pour $n < 0$ et $n > 0$ .

**3.1.** Pour définir les groupes  ${}_\varepsilon KQ_n$  pour  $n < 0$ , nous suivons le même schéma qu'en  $K$ -théorie algébrique [KV]. De manière précise, si on pose  $n = -m$ , on pose  $KQ_n(A) = KQ(S^m A)$ , où  $S^m A$  est la  $m^{\text{ième}}$  suspension de l'anneau  $A$ . Notons que l'isomorphisme

$${}_\varepsilon KQ^{\text{él}}(A) \cong {}_\varepsilon KQ^{\min}(A)$$

implique par suspensions itérées l'isomorphisme

$${}_\varepsilon KQ_{-m}^{\text{él}}(A) \cong {}_\varepsilon KQ_{-m}^{\min}(A)$$

Le théorème suivant est moins évident.

### 3.2. Théorème . L'homomorphisme

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\min}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\max}(A)$$

est surjectif pour  $n = 0$ , bijectif pour  $n < 0$ .

*Démonstration.* La surjectivité pour tout  $n$  est une conséquence immédiate des définitions (car nous considérons des formes hermitiennes paires). Par induction sur  $n$ , il suffit de démontrer l'injectivité pour  $n = -1$ . Pour cela, écrivons la suite exacte 2.8, en remplaçant  $A$  par sa suspension  $SA$  et son cône  $CA$ . On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\min}(CA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\max}(CA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\Xi(CA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\min}(CA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\max}(CA) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\min}(SA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\max}(SA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\Xi(SA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\min}(SA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\max}(SA) \end{array}$$

Puisque le cône d'un anneau est "flasque" (il existe un foncteur  $\tau$  de la catégorie  $\mathcal{P}(CA)$  dans elle-même tel que  $\tau \oplus Id$  soit isomorphe à  $\tau$ ), ses groupes de  $K$ -théorie hermitienne sont réduits à 0, ce qui implique que  ${}_{\varepsilon}\Xi(CA)$  est aussi égal à 0. Pour démontrer l'injectivité de la flèche  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_{-1}^{\min}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_{-1}^{\max}(A)$ , il suffit donc de montrer que l'homomorphisme  ${}_{\varepsilon}\Xi(CA) \rightarrow {}_{\varepsilon}\Xi(SA)$  est surjectif, ce qui est une conséquence du lemme suivant.

**3.3. Lemme.** Notons  $\Gamma(R)$  le groupe  $\Gamma$  défini en 2.8 pour tout anneau  $R$ . Alors l'homomorphisme canonique

$$\Gamma(CA) \rightarrow \Gamma(SA)$$

est surjectif.

*Démonstration.* Un élément de  $\Gamma(SA)$  est défini par une matrice infinie  $M$  telle que sur chaque ligne et chaque colonne il n'existe qu'un nombre fini d'éléments non nuls et telle que  ${}^t\overline{M} = \varepsilon M$  modulo une matrice finie. Soient  $a_{ij}$  les éléments (en nombre fini) de la matrice  $M$  tels que  $\overline{a}_{ij} \neq \varepsilon a_{ji}$ . Si on remplace ces éléments par 0, on trouve une matrice  $N$  dans  $CA$  qui est  $\varepsilon$ -hermitienne et dont la classe dans  $SA$  est égale à celle de  $M$ .

**3.4.** Définissons maintenant les groupes  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n$  pour  $n > 0$ , ce qui est plus délicat. En principe, il suffit de copier la construction + de Quillen à l'espace  $B_{\varepsilon}O(A)$ , ce qui est possible car le sous-groupe des commutateurs  $[{}_{\varepsilon}O(A), {}_{\varepsilon}O(A)]$  est parfait. On définit alors  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A)$  comme le  $n^{\text{ième}}$  groupe d'homotopie de  $B_{\varepsilon}O(A)^+$  (pour  $n > 0$ ). En fait, nous disposons de trois groupes de  $K$ -théorie hermitienne

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\max}(A), {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\min}(A) \text{ et } {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A)$$

associés respectivement aux groupes  ${}_{\varepsilon}O^{\max}(A)$ ,  ${}_{\varepsilon}O^{\min}(A)$  et  ${}_{\varepsilon}O^{\text{él}}(A)$ . Conformément à la philosophie de cet article, nous adopterons la notation uniforme  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A)$  pour ne pas compliquer l'exposition, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Ces groupes sont difficiles à calculer en général, comme d'ailleurs les groupes  $K_n(A)$  de Quillen dont ils sont la généralisation. Nous verrons cependant que, dans une certaine mesure, les "groupes de Witt supérieurs"  ${}_{\varepsilon}W_n(A) = \text{Coker}(K_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A))$  sont plus accessibles.

**3.5.** Comme il est bien connu, il existe d'autres définitions des foncteurs  $K_n$  et  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n$  équivalentes à la construction  $+$  de Quillen. La construction dite " $S^{-1}S$ " (due aussi à Quillen) est détaillée dans le cadre hermitien dans [K1] §1 et nous l'utiliserons pour la preuve de 4.5. Il existe aussi une définition en termes de  $A$ -fibrés plats qui est détaillée dans [K2] p. 42 et c'est celle que nous utiliserons essentiellement ici. Rappelons-là brièvement dans le cadre que nous intéresse.

On définit un  $A$ -fibré hermitien "virtuel" sur un  $CW$ -complexe  $X$  comme la donnée d'une fibration acyclique  $Y \rightarrow X$  et d'un  $A$ -fibré plat  $E$  sur  $Y$ , la fibre étant un  $A$ -module projectif de type fini muni d'une forme hermitienne dans l'un des trois sens que nous avons donnés à ce terme (ceci veut dire que les fonctions de transition du fibré sur  $Y$  sont des fonctions localement constantes dans chacune des trois catégories "max", "min" ou "él" concernées).

Deux tels fibrés virtuels

$$E \rightarrow Y \rightarrow X \text{ et } E' \rightarrow Y' \rightarrow X$$

sont dits équivalents s'il existe un fibré virtuel  $E_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow X$  et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \sigma \downarrow & \nearrow f_1 & \downarrow f' \\ Y_1 & \xleftarrow{\sigma'} & Y' \end{array}$$

tel que  $\sigma^*(E_1) \cong E$  et  $\sigma'^*(E_1) \cong E'$ .

En suivant le même schéma qu'en [K2] p. 42-50, on montre que le groupe de Grothendieck construit avec ces fibrés virtuels est isomorphe au groupe défini par les classes d'homotopie de  $X$  dans  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^+$ , noté  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_A(X)$ , et qui est une "théorie cohomologique" en  $X$ . Si  $X$  est une sphère de dimension  $n \geq 0$ , on retrouve ainsi  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A)$  comme le conoyau de la flèche évidente  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_A(X)$ .

On peut définir le spectre de la  $K$ -théorie hermitienne par la même méthode qu'en  $K$ -théorie algébrique. Ainsi, dans [K1], on démontre l'analogue du théorème de Gersten-Wagoner [W] en  $K$ -théorie hermitienne : on a une équivalence d'homotopie (non naturelle) entre  $\Omega(B_{\varepsilon}O(SA)^+)$  et  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^+$  (la même démonstration s'applique dans les trois cas considérés ici). Plus précisément, on définit le  $\Omega$ -spectre de la  $K$ -théorie hermitienne  ${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}(\mathbf{A})_*$  par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}(\mathbf{A})_n &= \Omega(B_{\varepsilon}O(S^{n+1}\mathbf{A})^+) & \text{pour } n \geq 0 \\ {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}(\mathbf{A})_n &= \Omega^{-n}(B_{\varepsilon}O(\mathbf{A})^+) & \text{pour } n < 0 \end{aligned}$$

En fait, ce spectre n'est qu'un langage commode. Pour pouvoir définir des cup-produits en  $K$ -théorie hermitienne, nous nous servons plutôt de la théorie cohomologique associée en termes de fibrés virtuellement plats comme nous l'avons explicité plus haut. D'ailleurs, une situation analogue se présente en  $K$ -théorie topologique, où les opérations sont plus aisément définies sur les fibrés vectoriels plutôt que sur la grassmannienne infinie.

#### 4. Cup-produits en $K$ -théorie hermitienne. Le cup-produit de Clauwens.

**4.1.** L'avantage du point de vue des fibrés plats est une définition très simple du cup-produit. Celui-ci est explicité dans [K2] à partir d'un morphisme  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire

$$\varphi : A \times B \rightarrow C$$

vérifiant la propriété de multiplicativité suivante

$$\varphi(aa', bb') = \varphi(a, b)\varphi(a', b')$$

Le cup-produit s'écrit alors sous la forme d'un accouplement bilinéaire

$$K_A(X) \times K_B(Y) \rightarrow K_{A \otimes B}(X \times Y)$$

où la flèche est simplement induite par le produit tensoriel des fibrés virtuellement plats. Si  $X$  est un espace muni d'un point base  $P$ , il est commode d'introduire la " $K$ -théorie réduite"  $\tilde{K}_A(X) = \text{Ker}[K_A(X) \rightarrow K_A(P) = K_0(A)]$ . Le produit précédent induit alors un "cup-produit réduit"

$$\tilde{K}_A(X) \times \tilde{K}_B(Y) \rightarrow \tilde{K}_{A \otimes B}(X \wedge Y)$$

En particulier, si  $X$  (resp.  $Y$ ) est une sphère  $S^n$  (resp.  $S^p$ ) avec  $n$  et  $p \geq 0$ , on en déduit le cup-produit usuel en  $K$ -théorie algébrique (cf. aussi [L]).

**4.2.** Le même schéma s'applique en  $K$ -théorie hermitienne<sup>4</sup>. Par exemple, compte tenu des signes de symétrie, les cup-produits classiques sont schématisés par des accouplements

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\max} \times {}_{\eta}K\mathcal{Q}^{\min} \rightarrow {}_{\varepsilon\eta}K\mathcal{Q}^{\min}$$

et

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\max} \times {}_{\eta}K\mathcal{Q}^{\text{él}} \rightarrow {}_{\varepsilon\eta}K\mathcal{Q}^{\text{él}}$$

De manière précise, si nous considérons une  $\varepsilon$ -forme hermitienne paire  $\phi = \phi_0 + \varepsilon^t \phi_0$  sur un  $A$ -module  $E$  et une forme  $\eta$ -quadratique définie par une classe de morphismes  $\psi_0$  sur un  $B$ -module  $F$ , alors  $\phi \otimes \psi_0$  est une classe de forme  $\varepsilon\eta$ -quadratique sur  $E \otimes F$ . En outre, si  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est un morphisme unitaire (resp. orthogonal) de  $E$  (resp.  $F$ ), il est facile de voir que  $\alpha \otimes \beta$  est un morphisme orthogonal de  $E \otimes F$ . De manière analogue, si  $(\beta, \gamma)$  est un morphisme dans la catégorie  ${}_{\eta}\mathcal{Q}^{\text{él}}$ , le couple  $(\alpha \otimes \beta, \alpha \otimes \gamma)$  définit un morphisme dans la catégorie  ${}_{\varepsilon\eta}\mathcal{Q}^{\text{él}}$ , ce qui définit le deuxième accouplement.

Ces deux cup-produits, définis en termes de modules, s'étendent naturellement aux fibrés plats ou virtuellement plats dans les catégories concernées (il convient de noter cependant que  $\psi_0$  n'est pas donné dans la structure pour le premier accouplement mais seulement sa classe fibre par fibre). En considérant des fibrés plats sur des sphères homologiques, on définit ainsi des accouplements

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\max}(A) \times {}_{\eta}K\mathcal{Q}_p^{\min}(B) \rightarrow {}_{\varepsilon\eta}K\mathcal{Q}_{n+p}^{\min}(C)$$

et

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\max}(A) \times {}_{\eta}K\mathcal{Q}_p^{\text{él}}(B) \rightarrow {}_{\varepsilon\eta}K\mathcal{Q}_{n+p}^{\text{él}}(C)$$

---

<sup>4</sup>À condition de supposer en outre que  $\overline{\varphi(a, b)} = \varphi(\bar{a}, \bar{b})$

**4.3.** Nous allons maintenant introduire un autre cup-produit plus subtil, dû essentiellement à Clauwens [C]. Celui-ci a été écrit par Clauwens pour les catégories de modules mais il s'étend aisément aux “bonnes” catégories des fibrés virtuellement plats munis de formes quadratiques. De manière précise, considérons la catégorie  ${}_{\eta}\mathcal{Q}^{\text{el}}(B)$  ainsi que la sous-catégorie  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{el}_0}(A[s])$  de  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{el}}(A[s])$  formée des  $A[s]$ -modules provenant de  $A$  par extension des scalaires, l'involution sur  $A[s]$  étant induite par l'involution de  $A$  et la transformation  $s \mapsto 1 - s$ .

Un objet de  ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{el}}(A[s])$  peut être décrit comme un couple  $(E, \theta)$ , où  $E$  est un objet de  $\mathcal{P}(A)$  et  $\theta$  une forme  $\varepsilon$ -quadratique sur  $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[s]$  s'écrivant sous la forme  $\sum \theta_n s^n$ , où  $\theta_n$  est un morphisme de  $E$  vers  $E^*$ .

Considérons maintenant un objet  $(F, \delta)$  de  ${}_{\eta}\mathcal{Q}^{\text{el}}(B)$ , où  $\delta$  est une forme  $\eta$ -quadratique non dégénérée sur  $F$  avec  $\Delta = \delta + \eta^t \delta$  comme forme hermitienne associée. Sur  $E \otimes F$  on peut alors considérer la forme  $\varepsilon\eta$ -quadratique définie par la formule suivante

$$\kappa = \sum \theta_n \otimes \Delta(\Delta^{-1} \delta)^n$$

Cette formule se simplifie si on identifie  $F$  et son dual par l'isomorphisme  $\Delta$ , ce qui revient à remplacer  $\Delta^{-1} \delta$  par  $\delta$ . On peut de même identifier  $E$  à  $E^*$  par l'isomorphisme  $\theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^t \theta_n$ . Le foncteur de dualité  $f \mapsto {}^t f$  est alors remplacée par le foncteur d'adjonction  $f \mapsto f^*$ . Un avantage de cette formulation est aussi de se débarrasser des signes de symétrie. La formule précédente s'écrit alors sous une forme plus simple

$$\kappa = \sum \theta_n \otimes \delta^n$$

avec  $\delta^* = 1 - \delta$ . En quelques lemmes fondamentaux (cf. [C] p. 43 et 44 et aussi l'appendice, où on écrit  $\phi$  au lieu de  $\Delta^{-1} \delta$  pour éviter toute confusion), Clauwens montre que l'accouplement précédent

$$\text{Obj}({}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{el}_0}(A[s])) \times \text{Obj}({}_{\eta}\mathcal{Q}^{\text{el}}(B)) \rightarrow \text{Obj}({}_{\varepsilon\eta}\mathcal{Q}^{\text{el}}(A \otimes B))$$

est bien défini sur les classes d'isomorphie de modules quadratiques élargis. En fait, Clauwens considère dans son article des modules libres mais sa méthode est plus générale, comme nous l'explicitons dans l'appendice. En particulier, nous pouvons définir un cup-produit remarquable

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{el}_0}(A[s]) \times {}_{\eta}K\mathcal{Q}^{\text{el}}(B) \rightarrow {}_{\varepsilon\eta}K\mathcal{Q}^{\text{el}}(A \otimes B)$$

où  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{el}_0}(A[s])$  est le sous-groupe de  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{el}}(A[s])$  engendré par les modules provenant de  $A$  par extension des scalaires (ceci est stablement le cas si  $A$  est noethérien régulier par exemple).

Dans les considérations précédentes, nous aurions pu remplacer la catégorie  $\mathcal{Q}^{\text{el}}$  par la catégorie plus simple  $\mathcal{Q}^{\text{min}}$ . La raison pour travailler dans la catégorie  $\mathcal{Q}^{\text{el}}$  est notre souhait de généraliser l'accouplement défini sur les groupes  $K\mathcal{Q}_0$  aux groupes  $K\mathcal{Q}_n$  définis dans le §3 pour  $n > 0$ . Si nous choisissons la définition de la  $K$ -théorie hermitienne en termes de fibrés plats, il nous faut montrer par exemple que la classe d'isomorphie de la forme quadratique  $\kappa$  définie plus haut ne dépend que des classes de  $\theta$  et de  $\delta$ . Les lemmes de Clauwens (redémontrés en appendice) montrent la nécessité de se donner le morphisme  $\gamma$  dans la formule (S) en 1.4. Grâce à ce nouveau point de vue, on peut étendre le cup-produit précédent aux groupes de  $K\mathcal{Q}$ -théorie supérieurs (dans la catégorie “él”), soit

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{el}_0}(A[s]) \times {}_{\eta}K\mathcal{Q}_p^{\text{el}}(B) \rightarrow {}_{\varepsilon\eta}K\mathcal{Q}_{n+p}^{\text{el}}(A \otimes B)$$

**4.4.** Au début de son article (théorème 1, p. 42), Clauwens montre que modulo l'addition de  $A$ -modules hyperboliques (voir l'appendice pour un énoncé précis), on peut se ramener au cas où  $\theta$  est "linéaire", i.e. du type  $\theta = gs$ . En d'autres termes,  $\theta_n = 0$ , à l'exception de  $\theta_1$  qui est égal à  $g$ . Puisque la forme hermitienne associée  $gs + \varepsilon^t g(1-s)$  est un isomorphisme, ceci implique que  ${}^t g = \varepsilon g(1+N)$ , où  $N$  est un endomorphisme nilpotent de  $E$  (un tel  $g$  est dit "presque hermitien"). Dans ce cas, la formule pour la forme quadratique  $\kappa$  ci-dessus est très simple : on trouve

$$\kappa = g \otimes \delta$$

(si on identifie  $F$  à son dual par  $\Delta$ ) En d'autres termes, l'accouplement précédent sur les groupes  $K\mathcal{Q}^{\text{él}}$  généralise (pour  $N = 0$ ) l'accouplement classique entre les formes hermitiennes (non nécessairement paires) et les formes quadratiques. Un cas particulier important est le cup-produit

$${}_1K\mathcal{Q}_1^{\text{él}_0}(S\mathbb{Z}[s]) \times {}_\eta K\mathcal{Q}_p^{\text{él}}(B) \rightarrow {}_\eta K\mathcal{Q}_{1+p}^{\text{él}}(S\mathbb{Z} \otimes B) = {}_\eta K\mathcal{Q}_{1+p}^{\text{él}}(SB)$$

**4.5. Théorème .** Soit  $u_1$  l'élément de  ${}_1K\mathcal{Q}_1^{\text{él}_0}(S\mathbb{Z}[s]) = {}_1K\mathcal{Q}_1^{\text{él}}(S\mathbb{Z}[s])$  correspondant à l'élément unité dans  $K\mathcal{Q}_0(\mathbb{Z}[s]) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (cf. [C], p. 47). Alors le cup-produit par  $u_1$  induit un isomorphisme entre  ${}_\eta K\mathcal{Q}_p^{\text{él}}(B)$  et  ${}_\eta K\mathcal{Q}_{1+p}^{\text{él}}(SB)$

*Démonstration.* Elle est analogue à celle en  $K$ -théorie algébrique ou hermitienne classique (cf. [K1] p. 224).

**4.6.** Rappelons par ailleurs qu'un autre cup-produit plus simple a été défini en 4.2 :

$${}_\varepsilon K\mathcal{Q}_n^{\text{max}}(A) \times {}_\eta K\mathcal{Q}_p^{\text{él}}(B) \rightarrow {}_{\varepsilon\eta} K\mathcal{Q}_{n+p}^{\text{él}}(A \otimes B)$$

Ces deux produits sont reliés ainsi :

**4.7. Théorème .** Le cup-produit de Clauwens est partiellement associatif dans le sens suivant. Pour trois anneaux  $B, C$  et  $D$ , on a le diagramme commutatif (avec  $n = n_1 + n_2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ )

$$\begin{array}{ccc} {}_{\varepsilon_1} K\mathcal{Q}_{n_1}^{\text{max}}(C) \times {}_{\varepsilon_2} K\mathcal{Q}_{n_2}^{\text{él}_0}(D[s]) \times {}_\eta K\mathcal{Q}_p^{\text{él}}(B) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon_1} K\mathcal{Q}_{n_1}^{\text{max}}(C) \times {}_{\varepsilon_2 \eta} K\mathcal{Q}_{n_2+p}^{\text{él}}(D \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} K\mathcal{Q}_{n_1+n_2}^{\text{él}_0}((C \otimes D)[s]) \times {}_\eta K\mathcal{Q}_p^{\text{él}}(B) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon \eta} K\mathcal{Q}_{n+p}^{\text{él}}(C \otimes D \otimes B) \end{array}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la formule donnée en 4.3. Nous devons multiplier les deux membres de la formule par la même forme hermitienne paire avant et après avoir fait le produit tensoriel par  $\Delta(\Delta^{-1}\delta)^n$ .

**4.8. Remarque.** Pour les degrés négatifs, nous avons seulement à considérer des modules sur des suspensions itérées des anneaux considérés. La notion de forme quadratique élargie est alors inutile dans les démonstrations. On peut même se limiter aux formes hermitiennes paires pour les degrés  $< 0$  d'après 3.2.

**4.9. Remarque.** Si 1 est scindé dans  $A$  (par exemple si 2 est inversible), on a des isomorphismes  $K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) \cong K\mathcal{Q}_n^{\text{max}}(A(e)) \cong K\mathcal{Q}_n^{\text{min}}(A(e))$  avec  $\bar{e} = -e$ .

### 5. Le théorème fondamental de la $K$ -théorie hermitienne pour des anneaux arbitraires

**5.1.** Dans ce paragraphe, nous allons désigner le spectre de la  $K$ -théorie hermitienne ainsi que celui de la  $K$ -théorie algébrique par des caractères gras. De manière précise,  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  représentera le spectre de la  $K$ -théorie algébrique usuelle ; celui de la  $K$ -théorie hermitienne sera représenté par l'un des trois spectres  ${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\max}(\mathbf{A})$ ,  ${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\min}(\mathbf{A})$  ou  ${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A})$ , suivant la théorie considérée. En particulier, les foncteurs “oubli” et hyperbolique induisent des morphismes

$${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{A}) \text{ et } \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A})$$

dont les fibres homotopiques respectives seront notées  ${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  et  ${}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$ . L'énoncé suivant généralise le théorème de [K2] (p. 260).

**5.2. Théorème .** *Nous avons une équivalence d'homotopie naturelle*

$${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \approx \Omega_{{}_{-\varepsilon}}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$$

**5.3. Remarques.** Le théorème est évident lorsque  $A = B \times B^{op}$ , une situation déjà considérée dans les paragraphes précédents. Dans ce cas, les spectres  ${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  et  $\Omega_{{}_{-\varepsilon}}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  coïncident tous les deux avec la fibre homotopique du morphisme évident  $\mathbf{K}(\mathbf{B}(\mathbf{e})) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B}) \times \mathbf{K}(\mathbf{B})$ .

Par ailleurs, si 1 est scindé dans  $A$ , nous retrouvons le théorème fondamental de la  $K$ -théorie hermitienne énoncé dans [K2] p. 260 (cf. la remarque 5.11 un peu plus loin). La démonstration du théorème 5.2 va être en fait calquée sur celle de [K2]. Nous mentionnerons simplement ici les modifications à y apporter.

**5.4.** Rappelons d'abord le principe général de la démonstration dans [K2] que nous appliquerons à plusieurs reprises : un morphisme d'anneaux hermitiens  $f : A \rightarrow B$  induit une application entre spectres

$${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{B})$$

dont nous pouvons interpréter la fibre homotopique d'après un argument adapté de Wagoner [W]. Pour cela, on considère le produit fibré d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & CB \\ \downarrow & & \downarrow \\ SA & \longrightarrow & SB \end{array}$$

d'où on déduit la fibration homotopique

$${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{R}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{SB})$$

car  ${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{CB})$  est contractile. L'espace des lacets de  ${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{R})$  est donc la fibre homotopique recherchée du morphisme

$${}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{B})$$

Deux cas importants peuvent être considérés. Dans le premier, le morphisme est  $A \times A^{op} \rightarrow M_2(A)$  et dans le second  $A \rightarrow A \times A^{op}$ , tous les deux définis en

1.8. Si nous désignons<sup>5</sup> par  $U_A$  (resp.  $V_A$ ) l'anneau  $R$  obtenu dans ces deux cas, nous voyons que  ${}_{\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  est homotopiquement équivalent à  $\Omega_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{U}_A)$  et que  ${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  est homotopiquement équivalent à  $\Omega\mathbf{K}_{\varepsilon}\mathcal{Q}^{\text{él}}(\mathbf{V}_A)$ .

**5.5.** Nous souhaitons définir une application

$${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \rightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$$

L'idée, déjà présente dans [K2], est d'inclure cette application dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{S}^2\mathbf{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_{-\varepsilon}\mathbf{D}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathbf{D}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \end{array}$$

La théorie  ${}_{-\varepsilon}\mathbf{D}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  est ici la fibre homotopique de l'application  $\mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  qui est induite par le morphisme d'anneaux  $A \times A^{\text{op}} \rightarrow M_2(A)$  décrit précédemment. Pour compléter ce diagramme, nous utilisons un élément remarquable de  ${}_{-1}D_0^{\text{max}}(\mathbb{Z})$  et effectuons le "cup-produit" par cet élément pour définir une application naturelle  $\sigma : {}_{\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{D}^{\text{él}}(\mathbf{A})$ . Les détails sont explicités en [K2] §2.3-8 (le fait que 1 soit éventuellement scindé dans  $A$  n'est pas nécessaire pour cet argument, comme il a été déjà souligné dans [K2]).

**5.6.** Nous procédons de manière symétrique pour construire une application en sens inverse  ${}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA})$ . Elle s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & \Omega {}_{-\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \downarrow \\ \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{E}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{E}^{\text{él}}(\mathbf{S}^2\mathbf{A}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{S}^2\mathbf{A}) \end{array}$$

La théorie  ${}_{\varepsilon}\mathbf{E}^{\text{él}}(\mathbf{A})$  est ici la fibre homotopique de l'application composée

$${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA} \times \mathbf{SA}^{\text{op}}) = \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{e})) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{A})$$

Pour compléter le diagramme, nous devons définir une application

$$\theta : {}_{-\varepsilon}\mathbf{KQ}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{E}^{\text{él}}(\mathbf{S}^2\mathbf{A})$$

L'idée nouvelle par rapport à [K2] est d'utiliser maintenant le cup-produit de Clauwens (écrit de manière relative pour la théorie  $E$ ), soit

$${}_{-1}E_{-2}^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{-\varepsilon}\mathbf{KQ}_n^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}E_{n-2}^{\text{él}}(A)$$

(avec  $\bar{s} = -s$ ).

Ceci se traduit au niveau des spectres par l'application  $\theta$ . L'élément de  ${}_{-1}E_{-2}^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) = {}_{-1}\mathbf{KQ}_{-2}^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) = {}_{-1}\mathbf{KQ}_{-2}^{\text{min}}(\mathbb{Z}[s])$  avec lequel est effectué le cup-produit est écrit de manière explicite dans [K1] p. 243 par une matrice à 30 termes avec un léger changement de notations (remplacer la lettre  $\lambda$  par  $s$ ). Nous devons ensuite plonger l'algèbre des polynômes laurentiens en les deux variables  $z$  et  $t$  dans la double suspension de  $\mathbb{Z}[s]$ .

<sup>5</sup>En fait, pour la  $K$ -théorie, c'est à dire la  $K$ -théorie hermitienne de  $A \times A^{\text{op}}$ , nous devons remplacer l'anneau des nombres duaux  $A(e)$  par  $A$ , comme il a été précisé en 1.8.



Pour terminer la démonstration du théorème 5.2, nous devons montrer que les deux compositions

$${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \quad \text{et} \quad {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$$

sont des équivalences d'homotopie. Nous nous référons de nouveau à [K2] p 273-277 pour le détail des arguments. Le point essentiel est l'associativité partielle du cup-produit établi en 4.7 qui remplace l'associativité usuelle utilisée en [K2]. En effet, de cette associativité partielle, on déduit des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} {}_1K\mathcal{Q}_0^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_{-1}D_0^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}D_n^{\text{él}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_1K\mathcal{Q}_0^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) \end{array}$$

Ce raisonnement montre que la composition

$${}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA})$$

est une équivalence d'homotopie. On démontre de même la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_{-1}D_0^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}D_n^{\text{él}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_1K\mathcal{Q}_0^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_{-1}D_0^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}D_n^{\text{él}}(A) \end{array}$$

ce qui montre que la composition en sens inverse

$${}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{SA}) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A})$$

est aussi une équivalence d'homotopie.

**5.7. Remarque.** Si nous nous intéressons uniquement aux “groupes de Witt étendus”

$${}_{\varepsilon}W_n^{\text{él}}(A) = \text{Coker}(K_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A))$$

les arguments précédents se simplifient considérablement (avec un résultat moins fort cependant ; à comparer avec 5.9 et 6.6). Le cup-produit par les éléments  $u_2 \in {}_{-1}W_2^{\text{max}}(\mathbb{Z})$  et  $u_{-2} \in {}_{-1}W_{-2}^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s])$ , associés aux éléments construits en 5.5 et 5.6, définissent des homomorphismes

$${}_{\varepsilon}W_n^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}W_{n+2}^{\text{él}}(A) \quad \text{et} \quad {}_{-\varepsilon}W_{n+2}^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}W_n^{\text{él}}(A)$$

dont la composition (à isomorphisme près) est la multiplication par 4 (en utilisant des arguments de  $K$ -théorie topologique : cf. [K1], p. 251). Notons que  ${}_{\varepsilon}W_n^{\text{él}}(A)$

est isomorphe à  ${}_{\varepsilon}W_n^{\min}(A)$  si  $n \leq 0$  et à  ${}_{\varepsilon}W_n^{\max}(A)$  si  $n < 0$ . Le groupe de Witt “stabilisé” que nous définirons dans le §6 utilisera de manière essentielle le deuxième cup-produit.

**5.8.** Comme il a été explicité en [K2] p. 278, le théorème 5.2 implique une suite exacte à 12 termes dont les termes sont définis ainsi. Le “cogroupe de Witt”  ${}_{\varepsilon}\overline{W}_n^{\text{él}}(A)$  est le noyau de la flèche oubli

$${}_{\varepsilon}KQ_n^{\text{él}}(A) \rightarrow K_n(A)$$

Nous définissons le groupe  $k_n(A)$  (resp.  $\overline{k}_n(A)$ ) comme le groupe de cohomologie de Tate pair (resp. impair) de  $\mathbb{Z}/2$  opérant sur  $K_n(A)$ .

**5.9. Théorème .** *Avec les définitions précédentes, nous avons une suite exacte à 12 termes où, pour simplifier, nous écrivons  $F$  pour  $F(A)$  en général,  $F$  étant l'un des foncteurs  $W^{\text{él}}$ ,  $\overline{W}^{\text{él}}$ ,  $k^{\text{él}}$  ou  $\overline{k}^{\text{él}}$*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow k_{n+1} \longrightarrow {}_{-\varepsilon}W_{n+2}^{\text{él}} \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_n^{\text{él}} \longrightarrow \overline{k}_{n+1}^{\text{él}} \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\overline{W}_{n+1}^{\text{él}} \longrightarrow {}_{-\varepsilon}W_{n+1}^{\text{él}} \\ \longrightarrow k_{n+1} \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_{n+2}^{\text{él}} \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\overline{W}_n^{\text{él}} \longrightarrow \overline{k}_{n+1} \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_{n+1}^{\text{él}} \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_{n+1}^{\text{él}} \longrightarrow k_{n+1} \cdots \end{aligned}$$

**5.10. Théorème .** *Supposons que 1 soit scindé dans  $A$  (par exemple que 2 soit inversible). Les homomorphismes naturels*

$${}_{\varepsilon}W_n^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}W_n(A) \text{ et } {}_{\varepsilon}\overline{W}_n^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_n(A)$$

*sont alors des isomorphismes.*

*Démonstration.* En raisonnant par récurrence sur  $n$ , c'est une conséquence immédiate de 5.9 et du théorème 4.3 de [K2] (voir aussi la remarque suivante).

**5.11. Remarque.** Si 1 est scindé dans  $A$ , nous avons un diagramme commutatif de spectres

$$\begin{array}{ccc} {}_{\varepsilon}\mathbf{V}^{\text{él}}(\mathbf{A}) & \approx & \Omega_{-\varepsilon}\mathbf{U}^{\text{él}}(\mathbf{A}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ {}_{\varepsilon}\mathbf{V}(\mathbf{A}) & \approx & \Omega_{-\varepsilon}\mathbf{U}(\mathbf{A}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des monomorphismes scindés. On voit ainsi que le théorème 5.2 implique le théorème fondamental de [K2] p. 260. Nous profitons de cette occasion pour combler une lacune dans sa démonstration : elle supposait implicitement que  ${}_1W(\mathbb{Z}[s]) \approx \mathbb{Z}$ , un résultat dû aussi à Clauwens ([C] p. 47).

**5.12.** Nous allons conclure ce paragraphe par un calcul explicite de groupes de Witt dans des situations qui ne sont pas envisagées en [K2]. Nous remarquons d'abord que par la même méthode, nous pouvons définir en bas degrés des morphismes de périodicité

$${}_{\varepsilon}U^{\min}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}V^{\min}(SA) \text{ et } {}_{-\varepsilon}V^{\min}(SA) \longrightarrow {}_{\varepsilon}U^{\min}(A)$$

inverses l'un de l'autre à isomorphisme près, en sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\varepsilon}U^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & -{}_{\varepsilon}V^{\text{él}}(SA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U^{\text{él}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\varepsilon}U^{\text{min}}(A) & \longrightarrow & -{}_{\varepsilon}V^{\text{min}}(SA) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U^{\text{min}}(A) \end{array}$$

En effet, la sophistication des fibrés plats n'est pas nécessaire dans cette situation. Par ailleurs, puisque  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{él}}(B)$  est isomorphe à  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{min}}(B)$  pour tout anneau  $B$ , on déduit du diagramme précédent un isomorphisme  ${}_{\varepsilon}U^{\text{él}}(A) \xrightarrow{\sim} -{}_{\varepsilon}U^{\text{min}}(A)$ . Nous avons enfin le diagramme commutatif suivant de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}W_1^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U^{\text{él}}(A) & \longrightarrow & K(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{él}}(A) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}W_1^{\text{min}}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U^{\text{min}}(A) & \longrightarrow & K(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}^{\text{min}}(A) \end{array}$$

Puisque les trois flèches de droite verticales sont des isomorphismes, nous en déduisons le théorème suivant

**5.13. Théorème .** *L'homomorphisme naturel*

$${}_{\varepsilon}W_1^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}W_1^{\text{min}}(A)$$

est un isomorphisme.

**5.14. Exemple.** Soit  $A = \mathbb{F}_q$  un corps fini de caractéristique 2. D'après Quillen, les groupes  $K_n(\mathbb{F}_q)$  sont des groupes finis d'ordre impair à l'exception de  $K_0(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}$ . On a  $W_0(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}/2$ , isomorphisme défini par l'invariant de Arf et  $W_1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}/2$ , isomorphisme défini par l'invariant de Dickson. Ici les groupes de Witt sont ceux calculés avec la forme paramètre min (c'est-à-dire ceux associés à des formes quadratiques).

Par ailleurs, la suite exacte des 12 (théorème 5.11) se réduit en fait à une suite à 6 termes, car  $\varepsilon = 1 = -1$ . Si on utilise le théorème précédent, on en déduit que les groupes de Witt élargis  $W_n^{\text{él}}(\mathbb{F}_q)$  sont égaux à  $\mathbb{Z}/2$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 6. Les groupes de Witt stabilisés

**6.1. Remarque.** Ce paragraphe est une extension aux anneaux quelconques des idées développées dans une Note aux Comptes Rendus [K4]. Une autre extension aux schémas est décrite dans [S].

**6.2.** Nous nous plaçons dans la catégorie des anneaux discrets  $A$  avec involution  $a \mapsto \bar{a}$  (nous ne supposons pas la commutativité ni l'existence d'un élément unité). Les groupes de Witt stabilisés  ${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A)$ , avec  $\varepsilon = \pm 1$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , que nous définirons plus loin, vérifient les propriétés suivantes

**1) Exactitude.** Pour toute suite exacte d'anneaux discrets avec involution

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

nous avons une suite exacte naturelle des groupes  $\mathcal{W}$

$$\longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_{n+1}(A'') \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A') \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A'') \longrightarrow$$

**2) Périodicité.** Nous avons un isomorphisme naturel

$${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \cong {}_{-\varepsilon}\mathcal{W}_{n+2}(A)$$

et par conséquent une périodicité 4 par rapport à l'indice  $n$ .

**3) Invariance par extension nilpotente.** Si  $I$  est un idéal nilpotent dans  $A$ , la projection  $A \rightarrow A/I$  induit un isomorphisme

$${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \cong {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A/I)$$

En d'autres termes  ${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(I) = 0$  pour un anneau nilpotent.

**4) Invariance homotopique.** Si 1 est scindé dans  $A$  (en particulier si 2 est inversible) l'extension polynomiale  $A \rightarrow A[t]$  (où  $\bar{t} = t$ ) induit un isomorphisme

$${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \cong {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A[t])$$

**5) Normalisation.** Si  $A$  est unitaire, il existe un homomorphisme naturel

$$\Theta : {}_{\varepsilon}W_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A)$$

où  ${}_{\varepsilon}W_n(A)$  est le groupe de Witt classique **[K1]** construit avec les formes quadratiques. Celui-ci induit un isomorphisme

$${}_{\varepsilon}W_n(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}' \cong {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}'$$

où  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[1/2]$ .

Si  $A$  est noethérien régulier, l'homomorphisme  $\Theta$  est un isomorphisme lorsque  $n \leq 0$ . Si on suppose en outre que 2 est inversible dans  $A$ , les  ${}_1\mathcal{W}_n(A)$ ,  $n \bmod 4$ , sont les groupes de Witt triangulés de Balmer [Ba].

**6.3.** Pour démontrer l'existence d'une telle théorie, nous allons essentiellement utiliser les résultats du paragraphe précédent sur la périodicité en  $K$ -théorie hermitienne. Rappelons que dans **[K2]** p. 243 nous avons défini un élément remarquable  $u_{-2}$  dans

$${}_{-1}K\mathcal{Q}_{-2}(\mathbb{Z}[s]) = {}_{-1}K\mathcal{Q}_{-2}^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s])$$

défini par une matrice antisymétrique ayant 30 éléments et à coefficients dans l'anneau des polynômes laurentiens à deux variables  $\mathbb{Z}[s][t, u, t^{-1}, u^{-1}]$ . Cet élément nous a déjà servi dans le §5 pour définir la flèche  ${}_{-\varepsilon}U_{n+1}^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}V_n^{\text{él}}(A)$ .

**6.4.** Dans le paragraphe 4, nous avons défini pour tout anneau unitaire  $A$  un cup-produit

$${}_{-1}K\mathcal{Q}_{-2}^{\text{él}}(\mathbb{Z}[s]) \times {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}K\mathcal{Q}_{n-2}^{\text{él}}(A)$$

Puisque nous sommes seulement intéressés aux valeurs de  $n$  qui sont  $\leq 0$ , nous pouvons remplacer les groupes  $K\mathcal{Q}_n^{\text{él}}$  par  $K\mathcal{Q}_n^{\text{min}}$  (et même  $K\mathcal{Q}_n^{\text{max}}$  pour  $n < 0$ ), que nous noterons simplement  $K\mathcal{Q}_n$ . En outre, l'homomorphisme de périodicité (défini par le cup-produit avec  $u_{-2}$ )

$$\beta : {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}K\mathcal{Q}_{n-2}(A)$$

composé à gauche par la flèche oubli  ${}_{-\varepsilon}K\mathcal{Q}_{n-2}(A) \rightarrow K_{n-2}(A)$  ou composé à droite par la flèche hyperbolique  $K_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A)$  est réduit à 0 (car la  $K$ -théorie de la suspension d'un anneau noethérien régulier est triviale). Par conséquent, la limite inductive du système de groupes de  $K$ -théorie hermitienne

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}K\mathcal{Q}_{n-2}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_{n-4}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}K\mathcal{Q}_{n-6}(A) \longrightarrow \dots$$

est aussi la limite inductive du système de groupes de Witt associés

$${}_{\varepsilon}W_n(A) \longrightarrow -{}_{\varepsilon}W_{n-2}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_{n-4}(A) \longrightarrow -{}_{\varepsilon}W_{n-6}(A) \longrightarrow \cdots$$

Cette limite est par définition le groupe de Witt stabilisé  ${}_{\varepsilon}W_n(A)$  que nous souhaitons définir. Notons que grâce à l'excision en  $K$ -théorie et en  $K$ -théorie hermitienne en degrés  $\leq 0$ , nous pouvons étendre cette définition aux anneaux non nécessairement unitaires en définissant  ${}_{\varepsilon}KQ_n(A)$  comme le noyau de  ${}_{\varepsilon}KQ_n(A^+) \rightarrow {}_{\varepsilon}KQ_n(\mathbb{Z})$ , où  $A^+$  est l'anneau  $A$  (considéré comme un  $\mathbb{Z}$ -algèbre) après addition d'un élément unité. La définition de  ${}_{\varepsilon}W_n(A)$  pour  $A$  non unitaire est tout à fait analogue. De ces considérations et de l'excision pour les groupes  $KQ_n$  si  $n \leq 0$ , nous déduisons la première propriété des groupes de Witt stabilisés :

**6.5. Théorème .** *A toute suite exacte d'anneaux discrets avec involution*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

*nous pouvons associer naturellement une suite exacte des groupes de Witt stabilisés*

$$\cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_n(A') \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_n(A'') \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_{n-1}(A') \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

**6.6.** L'isomorphisme  ${}_{\varepsilon}W_n(A) \cong -{}_{\varepsilon}W_{n+2}(A)$  et la périodicité 4 se déduisent immédiatement des définitions.

**6.7. Théorème (normalisation).** *Soit  $A$  un anneau noethérien régulier unitaire. Alors le groupe de Witt stabilisé  ${}_1W_0(A)$  (resp.  $-{}_1W_0(A)$ ) coïncide avec le groupe de Witt classique des formes quadratiques (resp.  $(-1)$ -quadratiques). En outre, pour tout anneau  $A$  unitaire, les homomorphismes canoniques*

$${}_{\varepsilon}W_n^{\text{él}}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_n^{\text{min}}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_n^{\text{max}}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_n(A)$$

*induisent des isomorphismes en tensorisant par  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[1/2]$ .*

*Démonstration.* Puisque les groupes de  $K$ -théorie négative de  $A$  sont triviaux si  $A$  est noethérien régulier, la suite exacte à 12 termes décrite en 5.9 montre que les flèches de la suite

$${}_{\varepsilon}W_0(A) \longrightarrow -{}_{\varepsilon}W_{-2}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}W_{-4}(A) \longrightarrow -{}_{\varepsilon}W_{-6}(A) \longrightarrow \cdots$$

sont des isomorphismes. Par exemple, si  $\varepsilon = 1$  et si  $A$  est le corps à 2 éléments, nous trouvons le groupe  $\mathbb{Z}/2$  (qui est détecté par l'invariant de Arf).

Par ailleurs si  $A$  est un anneau quelconque, en utilisant la localisation en  $K$ -théorie hermitienne, nous avons construit en [K1] deux éléments dans  $-{}_1W_2^{\text{max}}(\mathbb{Z})$  et  $-{}_1W_{-2}^{\text{max}}(\mathbb{Z})$  dont le cup-produit dans  ${}_1W^{\text{max}}(\mathbb{Z})$  est une puissance de 2. Les premiers isomorphismes se démontrent en se ramenant par périodicité aux degrés négatifs. Le dernier isomorphisme résulte de la suite exacte à 12 termes démontrée en 5.9.

**6.8. Théorème (invariance par extension nilpotente).** *Si  $I$  est un idéal nilpotent dans  $A$ , la projection  $A \rightarrow A/I$  induit un isomorphisme*

$${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \cong {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A/I)$$

*Par conséquent,  ${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(I) = 0$  pour tout idéal nilpotent  $I$ .*

*Démonstration.* Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que  $A$  est unitaire. Dans ce cas, il est bien connu que tout module projectif de type fini sur  $A/I$  provient d'un module projectif  $E$  sur  $A$  par extension des scalaires et qu'il est donc du type  $E/I$ . Par conséquent, la forme  $\varepsilon$ -hermitienne sur  $A/I$  est donnée par un isomorphisme

$$\varphi : E/I \rightarrow (E/I)^*$$

Puisque  $\varphi$  est paire, nous pouvons l'écrire sous la forme  $\varphi_0 + \varepsilon^t \varphi_0$ . Soit  $\tilde{\varphi}_0$  un homomorphisme  $E \rightarrow E^*$  tel que  $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 \mod I$ . Alors  $\varphi = \tilde{\varphi}_0 + \varepsilon^t \tilde{\varphi}_0$  est une forme  $\varepsilon$ -hermitienne non dégénérée  $E \rightarrow E^*$  qui est un relevé de  $\varphi$ . Ceci montre que le morphisme  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(A/I)$  est surjectif pour tout idéal nilpotent  $I$  (aussi bien pour  $K\mathcal{Q}^{\max}$  que pour  $K\mathcal{Q}^{\min}$ ). Il en est donc de même de

$${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_n(A/I)$$

pour  $n \leq 0$  en considérant des suspensions itérées (él, max et min coïncident en degrés  $n < 0$ ; cf. 3.2). La surjectivité de l'homomorphisme  ${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A/I)$  en résulte.

L'injectivité du morphisme  ${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A/I)$  est plus délicate à montrer. En raisonnant par récurrence sur le degré de nilpotence de  $I$ , nous pouvons d'abord supposer que  $I^2 = 0$ . Par ailleurs, nous savons que tout module muni d'une forme hermitienne paire est facteur direct d'un module hyperbolique. C'est donc l'image d'un projecteur auto-adjoint  $p$ , soit  $p^2 = p$  et  $p^* = p$  dans un  $H(A^n)$ .

Enfin, sans restreindre la généralité (puisque nous stabilisons), nous pouvons supposer que  $A$  est la suspension  $SR$  d'un anneau  $R$  et que  $I = SJ$  où  $J$  est un idéal de  $R$  tel que  $J^2 = 0$ . La démonstration de l'injectivité se résume alors à la solution du problème suivant : nous considérons deux projecteurs auto-adjoints  $p_0$  et  $p_1$  dans un module hyperbolique sur  $A = SR$  tels que leurs images  $\mod I$ , soient  $\bar{p}_0$  et  $\bar{p}_1$  sont conjuguées. Puisque  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1(SR) \cong {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(R)$  en général et que le morphisme  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(R) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_0(R/J)$  est surjectif comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité<sup>6</sup> que  $\bar{p}_0 = \bar{p}_1$  ou encore  $p_1 = p_0 + \sigma$ , où  $\sigma$  appartient à  $I$ . De l'identité  $(p_1)^2 = p_1$  et de l'égalité  $I^2 = 0$ , nous déduisons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma &= p_0\sigma + \sigma p_0 \\ \sigma p_0\sigma &= 0 \\ \sigma^2 &= \sigma^2 p_0 = p_0\sigma^2 \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'endomorphisme  $\alpha = 1 - p_0 - p_1 + 2p_0p_1$ . Puisque  $\alpha \equiv 1 \mod I$ , c'est un isomorphisme. Par ailleurs, il vérifie la relation  $\alpha p_1 = p_0\alpha$ . Nous allons maintenant montrer que  $\alpha\alpha^* = 1$ . Pour cela, on remarque que  $\alpha$  s'écrit aussi

$$\alpha = 1 - \sigma + 2p_0\sigma$$

---

<sup>6</sup>La surjectivité de l'homomorphisme  ${}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\min}(\Lambda) \rightarrow {}_{\varepsilon}K\mathcal{Q}_1^{\min}(\Lambda/I)$  implique la surjectivité de l'homomorphisme  ${}_{\varepsilon}O^{\min}(\Lambda) \rightarrow {}_{\varepsilon}O^{\min}(\Lambda/I)$ .

et, grâce aux identités précédentes, un calcul direct montre bien que

$$\alpha\alpha^* = (1 - \sigma + 2p_0\sigma)(1 - \sigma + 2\sigma p_0) = 1$$

Les projecteurs  $p_0$  et  $p_1$  sont ainsi conjugués par un automorphisme unitaire et déterminent par conséquent la même classe de forme hermitienne paire<sup>7</sup>.

**6.9. Théorème (invariance homotopique).** *Soit  $A$  un anneau unitaire tel que 1 soit scindé dans  $A$ . Il existe donc un élément  $\lambda$  dans le centre de  $A$  tel que  $\lambda + \bar{\lambda} = 1$ . L'extension polynomiale  $A \rightarrow A[t]$  (avec  $\bar{t} = t$ ) induit alors un isomorphisme*

$${}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A) \cong {}_{\varepsilon}\mathcal{W}_n(A[t])$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer le théorème pour  $n = 0$ . Celui-ci est déjà connu pour 2 inversible dans  $A$  (voir [O] pour une preuve simple). Cependant, il existe des anneaux où 2 n'est pas inversible et où 1 est scindé, par exemple le corps fini  $\mathbb{F}_4$  muni de l'involution non triviale. Pour traiter ce cas plus général, nous devons réexaminer la preuve classique. En fait, le seul point qui mérite une précision dans cette preuve est le lemme suivant.

**6.10. Lemme.** *Soit  $A$  un anneau avec  $\lambda$  dans le centre de  $A$  tel que  $1 = \lambda + \bar{\lambda}$ . Soit  $E$  un  $A$ -module muni d'une forme  $\varepsilon$ -hermitienne et soit  $\alpha = 1 + \nu t$  un élément de  $GL(E \otimes \mathbb{Z}[t])$  avec  $\nu$  nilpotent et auto-adjoint. Alors  $\alpha$  peut être écrit sous la forme  $\gamma(t)^*\gamma(t)$ , où  $\gamma(t)$  est un polynôme en  $t$  dans l'anneau engendré par  $\lambda$  et  $\nu$ .*

*Démonstration.* Nous allons construire par récurrence sur  $n$  un polynôme de degré au plus  $n$  dans l'anneau engendré par  $\nu$  et  $\lambda$ , soit  $\gamma_n(t) = 1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ , tel que  $\gamma_n(t)^*\gamma_n(t) \equiv 1 + \nu t \pmod{(\nu t)^{n+1}}$ . Pour  $n = 1$ , nous posons  $\gamma_1(t) = 1 + \lambda\nu t$ . Si  $\gamma_n$  est construit, nous avons  $\gamma_n(t)^*\gamma_n(t) = 1 + \nu t + b_{n+1}(\nu t)^{n+1} \pmod{(\nu t)^{n+2}}$  avec  $b_{n+1} = \bar{b}_{n+1}$ . Nous posons alors  $\gamma_{n+1}(t) = (1 - \lambda b_{n+1}(\nu t)^{n+1})\gamma_n(t)$  pour obtenir l'identité requise

$$\gamma_{n+1}(t)^*\gamma_{n+1}(t) \equiv 1 + \nu t \pmod{(\nu t)^{n+2}}$$

**6.11. Exemple.** Si  $A$  est un corps fini de caractéristique 2, il est facile de montrer que les groupes de Witt stabilisés  $\mathcal{W}_n(A)$  sont tous isomorphes à  $\mathbb{Z}/2$ . Ils coïncident en fait avec les groupes  $W_n^{\text{el}}(A)$  en tout degré.

**6.12. Remarque.** Ces groupes de Witt stabilisés ont été généralisés aux schémas par M. Schlichting [S]. Dans cette généralité, on doit cependant supposer 2 inversible.

## 7. Les lemmes de Clauwens

**7.1. Lemme.** *La forme hermitienne associée à la forme quadratique  $\kappa$  définie en 4.3 est non dégénérée.*

---

<sup>7</sup>D'après 2.10, il revient au même de considérer des formes hermitienne paires ou des formes quadratiques dans les groupes stabilisés.

*Démonstration.* Nous suivons les simplifications de notation indiquées en 4.3 en remplaçant notamment  $\delta$  par  $\phi$  tel que  $\phi + \phi^* = 1$ . Nous pouvons donc écrire

$$\kappa = \sum \theta_n \otimes \phi^n$$

qu'il est plus suggestif de noter  $\theta(\phi)$ . Nous avons alors

$$\kappa + \kappa^* = \sum \theta_n \otimes \phi^n + \sum (\theta_n)^* \otimes (\phi)^{*n} = \sum \theta_n \otimes \phi^n + \sum (\theta_n)^* \otimes (1 - \phi)^n$$

Par ailleurs, on sait que le polynôme en  $s$  défini par  $\sum \theta_n \otimes s^n + \sum (\theta_n)^* \otimes (1 - s)^n$  est inversible (c'est la forme hermitienne  $H$  associée à  $\theta$ ). Il en résulte évidemment que  $\kappa + \kappa^*$  est inversible. On peut aussi l'écrire  $H(\phi)$  avec un abus d'écriture évident.

**7.2. Lemme.** *Si on change  $\theta = \sum \theta_n s^n$  en  $\theta + Z - Z^*$ , les formes quadratiques associées  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* La forme quadratique  $\theta = \sum \theta_n s^n$  est modifiée en

$$\sum \theta_n s^n + \sum \sigma_n s^n - \sum (\sigma_n)^* (1 - s)^n$$

Par conséquent  $\kappa$  est modifiée en  $\kappa + \sigma(\phi) - (\sigma(\phi))^*$  (remplacer  $s$  par  $\phi$ ).

**7.3. Lemme.** *Modulo l'image de  $K\mathcal{Q}(A)$  dans  $K\mathcal{Q}^{\text{elo}}(A[s])$  (et même d'une forme hyperbolique sur  $A$ ), tout élément de ce dernier groupe peut être représenté par une forme linéaire en  $s$ .*

*Démonstration.* Soit  $\theta = \sum_0^N \theta_n s^n$  une forme quadratique de degré  $N$ . L'identité suivante et un raisonnement par récurrence sur  $N$  montre qu'on peut réduire le degré de  $\theta$  à 0 ou 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -s & (\theta_N)^*(1-s)^{N-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+s & 1 & 0 \\ \theta_N s^{N-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \theta_N s^N & 0 & -s \\ \theta_N s^{N-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $\theta$  s'écrit  $\theta_0 + \theta_1 s$ , on peut aussi éliminer le terme constant en écrivant que  $\theta$  est équivalente à

$$\theta_0 + \theta_1 s - \theta_0(1 - s) + (\theta_0)^* s = (\theta_1 + \theta_0 + (\theta_0)^*)s$$

ce qui démontre le lemme.

Le lemme précédent nous montre qu'il suffit de vérifier la validité du produit de Clauwens défini en 4.3 (mêmes notations), dans le cas où  $\theta$  est une forme linéaire en  $s$ , soit  $\sigma s$  avec  $\sigma$  presque symétrique, i.e.  $\sigma^* = \sigma(1 + N)$ , avec  $N$  nilpotent. Il nous faut montrer ensuite que le cup-produit de Clauwens ne dépend que de la forme quadratique associée à  $\delta$  (ou l'endomorphisme  $\phi$  grâce à l'identification de  $F$  à son dual). Rappelons qu'on a aussi identifié  $E$  à son dual par l'isomorphisme  $\theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^t\theta_n$ .

Si on pose  $G = E \otimes F$ , la transposée  ${}^t f$  d'une application  $f$  de  $G$  dans son dual s'identifie également à son application adjointe  $f^*$  (cf. les remarques faites en 4.3).



**7.4. Lemme.** Soit  $\phi$  et  $\zeta$  deux endomorphismes de  $F$  tels que  $\phi + \phi^* = 1$ . Pour tout entier  $p \geq 0$ , il existe alors un isomorphisme  $f_p$  de  $G$  sur son dual tel que

$$(f_p)^*(\sigma \otimes \phi)f_p = \sigma \otimes (\phi + \zeta - \zeta^*) + Z_p - (Z_p)^* \mod (\sigma N^{p+1} \otimes 1)$$

où  $N = \sigma^{-1}\sigma^* - 1$  est nilpotent et où l'expression  $\mod (\sigma N^{p+1} \otimes 1)$  signifie une somme de morphismes du type  $\sigma N^{p+1} \otimes \kappa_{p+1} + \sigma N^{p+2} \otimes \kappa_{p+2} + \dots$  (qui est finie puisque  $N$  est nilpotent).

*Démonstration.* Puisque  $\sigma^* = \sigma + \sigma N$ , on a  $\sigma^* N^k \otimes 1 = \sigma N^k \otimes 1 \mod (\sigma N^{k+1} \otimes 1)$ . On a de même  $N^{*k} \sigma N^r = \sigma N^{r+k} \mod \sigma N^{r+k+1} \otimes 1$ . Nous allons maintenant construire  $f_p$  et  $Z_p$  par récurrence sur  $p$ . Pour  $p = 0$ , on pose  $f_0 = 1$  et  $Z_0 = -\sigma \otimes \zeta$ . Pour définir  $f_{p+1}$  à partir de  $f_p$ , on écrit

$$(f_p)^*(\sigma \otimes \phi)f_p - [\sigma \otimes (\phi + \zeta - \zeta^*) + Z_p - (Z_p)^*] = -\sigma N^{p+1} \otimes \kappa_{p+1} \mod (\sigma N^{p+1} \otimes 1)$$

On pose alors  $U = N_{p+1} \otimes \kappa_{p+1}$  et  $f_{p+1} = f_p + U$  et  $Z_{p+1} = Z_p + U^*(\sigma \otimes \phi)$

En travaillant  $\mod (\sigma N^{p+2} \otimes 1)$ , on obtient les identités suivantes

$$\begin{aligned} & (f_{p+1})^*(\sigma \otimes \phi)f_{p+1} - [\sigma \otimes (\phi + \zeta - \zeta^*) + Z_{p+1} - (Z_{p+1})^*] \\ &= (f_{p+1})^*(\sigma \otimes \phi)f_{p+1} - (f_p)^*(\sigma \otimes \phi)f_p - (Z_{p+1} - Z_p) + ((Z_{p+1})^* - (Z_p)^*) - \sigma N^{p+1} \otimes \kappa \\ &= U^*(\sigma \otimes \phi) + (\sigma \otimes \phi)U - U^*(\sigma \otimes \phi) + (\sigma^* \otimes \phi^*)U - \sigma N^{p+1} \otimes \kappa = \sigma N^{p+1}(\phi + \phi^* - 1)\kappa \\ &= 0 \mod \sigma N^{p+2} \otimes 1 \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

## Références

- [B1] BAK A. :  $K$ -theory of forms. Annals of Math Studies 98, Princeton N.J. Princeton University Press (1981).
- [B2] BAK A. : Arf's theorem for trace noetherian and other rings. Journal of Pure and Applied Algebra 14 (1979), 1-20
- [BA] BALMER P. : An introduction to triangular Witt groups and a survey of applications. Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms, 3158, Contemp. Math., 344, Amer. Math. Soc. (2004).
- [C] CLAUWENS F.J.-B.J. : The  $K$ -theory of almost symmetric forms. Topological structures II. Mathematical Centre Tracts 115, (1975) 41-49.
- [K1] KAROUBI M. : Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal. Annals of Maths 112, (1980) 207-282.
- [K2] KAROUBI M. : Le théorème fondamental de la  $K$ -théorie hermitienne. Annals of Maths 112, (1980) 259-282.
- [K3] KAROUBI M. : Homologie cyclique et  $K$ -théorie. Astérisque N° 149 (1987).
- [K4] KAROUBI M. : Stabilization of the Witt group. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 362, (2006) 165-168.
- [KV] KAROUBI M. et VILLAMAYOR O. :  $K$ -théorie algébrique et  $K$ -théorie topologique II. Math. Scand. 32, (1973) 57-86.
- [L] LODAY J.-L. :  $K$ -théorie algébrique et représentations de groupes. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., (1976) 309-377.
- [M] MILNOR J. : Introduction to Algebraic  $K$ -theory. Ann. of Math Studies 197. Princeton N.J. Princeton University Press (1974).
- [O] OJANGUREN M. : On Karoubi's theorem :  $W(A) = W(A[t])$ . Arch. Math. Basel 43, (1984) 328-331.
- [R] RANICKI A. : Algebraic L-theory I. Foundations. Proc. London Math. Soc. (3) 27 (1973) 101-125.
- [S] SCHLICHTING M. : (en préparation)

- [T] TITS J. : Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford. Invent. Math. 5, (1968)19–41.
- [Wa] WAGONER J.B. : Delooping classifying spaces in Algebraic  $K$ -theory. Topology 11, (1972) 349-370.
- [W] WALL C.T.C. : On the axiomatic foundations of the theory of Hermitian forms. Proc. Cambridge Philos. Soc. 67 (1970) 243-250.

MAX KAROUBI

Université Denis Diderot / Paris 7

UFR de Mathématiques. Case 7012

175, rue du Chevaleret

75205 Paris cedex 13

max.karoubi@gmail.com

URL : [http ://people.math.jussieu.fr/~karoubi](http://people.math.jussieu.fr/~karoubi)